براءة الأشقر

كلية العلوم
قسم الرياضيات

السنة الثالثة رياضيات

الفصل الأول 2015 - 2016

مقرر الميكانيك2

المدة: ساعة ونصف

أجب عن الأسئلة التالية: (ملاحظة: يفضل الرسم بالرصاص)

السؤال الأول(28 درجة): اختر الاجابة الصحيحة في كل مما يلي:

1- عزم عطالة قضيب متجانس كتلته M وطوله L بالنسبة لمحور منطبق على استقامته هو:

أ) $\frac{ML^2}{3}$ ، ب) $\frac{ML^2}{6}$ ، ج) $\frac{ML^2}{12}$ ، د) صفر ، هـ) كل ماسبق صحيح.

2- عزم عطالة سلك دائري متجانس كتلته M ، ونصف قطره R بالنسبة لنقطة من محيطه ، هو:

أ) $\frac{MR^2}{2}$ ، ب) MR^2 ، ج) $2MR^2$ ، د) $3MR^2$ ، هـ) كل ماسبق خطأ.

3- عزم عطالة صفيحة دائرية متجانسة كتلتها M ونصف قطرها R بالنسبة لنقطة من محيطها هو:

أ) $\frac{MR^2}{2}$ ، ب) MR^2 ، ج) $2MR^2$ ، د) $3MR^2$ ، هـ) $\frac{3MR^2}{2}$.

4- لتعيين موضع جسم صلب بشكل عام يكفي معرفة موضع:

أ) ثلاث نقاط منه ليست على استقامة واحدة ، ب) نقطة منه ، ج) نقطتين منه.

5- يكفي لتعيين موضع القضيب، معرفة موضع:

أ) نقطة واحدة منه ، ب) نقطتين منه ، ج) ثلاث نقاط منه.

6- يكفي لتعيين موضع الجسم الطليق في R^3 ، معرفة عدد الوسطاء المستقلة، وهو:

أ) واحد ، ب) اثنان ، ج) كل ماسبق صحيح ، د) ستة، هـ) تسعة.

7- يكفي لتعيين موضع الجسم الطليق في R^3 ، معرفة:

أ) زوايا أولر ، ب) إحداثيات نقطة منه ، ج) الاحداثيات الثلاث لنقطة منه وزوايا أولر الثلاث.

السؤال الثاني(28درجة): إذا كان المجسم الناقصي الصلب المتجانس منسوباً إلى جملة محاور تناظره $OX_1Y_1Z_1$ وأن a ، b ، c أطوال أنصاف محاوره، وكتلته M ، فالمطلوب:

1) أوجد $I_{OZ_1X_1}$ ، $I_{OY_1Z_1}$ ، $I_{OX_1Y_1}$ ، ثم أوجد I_{OZ_1} وهذا (الأخير) بدون إجراء أي عملية مكاملة.

2) أوجد $P_{Z_1X_1}$ ، $P_{Y_1Z_1}$.

السؤال الثالث(20درجة): إذا تحرك قرص صلب دائري نصف قطره R في المستوي الشاقولي OXY بحيث يتدحرج بدون انزلاق على المحور الأفقي OX ، فالمطلوب: 1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع القرص مع الرسم المناسب. 2) أوجد المركز الآني لدوران القرص، وارمز له على الرسم السابق بـ I.

3) أوجد منحني القاعدة ومنحني المتدحرج.

ودوران الذاتي

السؤال الرابع(24درجة): إذا تحرك مخروط دوراني بحيث يبقى رأسه ساكناً (ثابتاً)، ويبقى محور تناظره OZ_1 واقعاً دوماً في المستوي الأفقي ،فالمطلوب: 1) أوجد الوسطاء المستقلة الكافية لتعيين موضع المخروط مع الرسم المناسب.

2) أوجد كلاً من سطح مخروط القاعدة وسطح مخروط المتدحرج.

—— تمنياتي لكم بالتوفيق والنجاح —— مدرس المقرر: د.كامل محمد ——

سلم تصحيح مقرر الميكانيك ٢

فصل أول ٢٠١٥ - ٢٠١٦

العلوم
رياضيات
سنة ثالثة

السؤال الأول: (1-د) و (2-ج) و (3-هـ) و (4-أ) و (5-ب) و (6-د) و (7-ج).

28 السؤال الثاني: منذ الوضع محاور الجملة المتماسكة مع الجسم الناقص هي محاور تناظره ولتكن $Ox_sy_sz_s$ كما في الشكل لذلك مهما تكن النقطة (x_s, y_s, z_s) التي يقع فيها الجسم العنصري dm من الجسم فإنها تحقق:

$$\frac{x_s^2}{a^2}+\frac{y_s^2}{b^2}+\frac{z_s^2}{c^2}\leq 1$$

ولتسهيل الحل نقوم بما يلي: إجراء التحويل للإحداثيات إلى أخرى:

$$x_s = x_1 a ,\; y_s = y_1 b ,\; z_s = z_1 c \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \leq 1$$

وهي متباينة مجسم كروي. وهكذا نجد أن:

$$dm = \rho\, dv = \rho\, dx_s \cdot dy_s \cdot dz_s = \rho \cdot a \cdot b \cdot c\, dx_1\, dy_1\, dz_1$$

ثم نجري التحويل الذي نحصل منه على معادلة الكرة في الإحداثيات الكروية:

(10)

$$x_1 = r\sin\theta\cos\varphi ,\; y_1 = r\sin\theta\sin\varphi ,\; z_1 = r\cos\theta$$

حيث:

$$0 \leq r \leq 1 ,\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi ,\quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

ومن الحساب dv نحسب $dx_1 dy_1 dz_1$ بدلالة الإحداثيات الكروية

$$dx_1\, dy_1\, dz_1 = |J|\, dr\, d\theta \cdot d\varphi$$

ونحسب معين جاكوبي فنجد $J = r^2 \sin\theta$ وبالتالي:

(8)

$$dm = \rho\, a \cdot b \cdot c \cdot r^2 \cdot \sin\theta . dr \cdot d\theta \cdot d\varphi$$

ط/ لحساب عزوم العطالة ننطلق من التعريف ونستفيد مما سبق فنجد

$$I_{Ox_sy_s} = \rho\int_V z_s^2 . dx_s . dy_s . dz_s = \rho . a . b c^3 . \int_0^1 r^4 dr \int_0^\pi \cos^2\theta . d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi$$

(8)

$$= \rho\, a . b . c^3 \frac{1}{5} . (2) . 2\pi = \rho(\tfrac{4}{3} a . b . c)\, c^2 = \frac{M}{5} c^2$$

وبنفس الطريقة نجد أن

$$I_{Ox_sz_s} = \frac{M}{5} b^2 ,\quad I_{Oy_sz_s} = \frac{M}{5} b^2$$

ومن خواص عزوم العطالة نجد:

(2)

$$I_{Oz_s} = I_{Ox_sz_s} + I_{Oy_sz_s} = \frac{M b^2}{5} + \frac{M a^2}{5} = \frac{M}{5}(a^2+b^2)$$

$\frac{1}{3}$

وتمثل هذه الشريحة ...

ط: بما أن OX_sZ_s مستوي تناظر هندسي للمجسم فلكل نقطة من المجسم ولتكن (x_s, y_s, z_s) توجد نظيرة لها بالنسبة لهذا المستوي هي $(x_s, y_s, -z_s)$ وبالتالي يكون:

$$P_{x_sz_s} = \int_V x_s z_s \, dm = \int_{V/2} x_s z_s \, dm + \int_V x_s(-z_s) \, dm = 0$$

ولنفس السبب نجد:

$$P_{y_sz_s} = \int_V y_s z_s \, dm = \int_{V/2} y_s z_s \, dm + \int_{V/2} y_s \cdot (-z_s) \, dm = 0$$

(8)

السؤال الثالث: بما أن الحركة مستوية فيتعين موضع القرص بثلاثة وسطاء هي (x, y) إحداثيا C مركز القرص و φ زاوية الدوران حول C ولكن بما أن القرص يستند على OX فإن $y = R$ كما في الشكل وبما أن تقع القرص يتدحرج بدون انزلاق فإن سرعة النقطة منه في موقع تماس محيط القرص مع المحور OX الثابت معدومة دوماً وبالتالي سرعة نقطة التماس $\vec{V}(I) = 0$ [20]

ومن قانون توزيع السرع

$\vec{V}(I) = \vec{V}(C) + \dot{\varphi} \vec{K} \wedge \vec{CI}$ ($I \in S$)

(12)

وبالتالي: (φ و x مرتبطان خطياً)

$\dot{x}\vec{i} + R\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow$

إذن أحدهما مستقل وليكن φ. ويكفي معرفته وحده لتعيين موضع القرص بـ.ح.م.

ط2: إن I (نقطة تماس محيط S مع OX) هي مركز آني للدوران لأن سرعتها معدومة بسبب التدحرج بدون انزلاق (2)

ط3: إن منحني القاعدة هو OX ($y=0$) لأن المركز الآني للدوران لا يمكنه يغادره

إن منحني المتدحرج هو محيط القرص لأن المركز الآني للدوران دوماً ينتمي إلى محيط S ... و. ح. (6)

السؤال الرابع ط1: نأخذ جملة ثابتة $OXYZ$ فيها OZ شاقولي ونأخذ جملة متماسكة مع المخروط S $OX_sY_sZ_s$ فيها OZ_s أفقي (وهو محور تناظر المخروط بالوضع) وبالتالي فالمستوي OX_sY_s شاقولي وتقع المحاور الأربعة OY_s, OZ, OX_s, OX_1 فيه. وبما أن الحركة تتم بثبات نقطة منه هي الرأس بالوضع فهي دورانية حول الرأس تتعين بمعرفة زوايا أولر ولكن بالفرض زاوية التأرجح ثابتة فهي $\theta = \frac{\pi}{2}$ إذن تتعين بمعرفة $\psi = \widehat{OX, OX_1}$ الترنح و $\varphi = (\widehat{OX_1, OX_s})$ الدوران الذاتي [24]

(10)

$\frac{2}{3}$

ج: نحسب أولاً مركبات $\vec{\omega}$ في R فنحصل بسهولة على

$p = \dot{\psi}\sin\varphi$ و $q = -\dot{\psi}\cos\varphi$ و $r = \dot{\varphi}$

ومعادلات المحور الآني للدوران

$$\frac{x}{p} = \frac{y}{q} = \frac{z}{r} \Rightarrow \frac{x}{\dot{\psi}\sin\varphi} = \frac{y}{-\dot{\psi}\cos\varphi} = \frac{z}{\dot{\varphi}}$$

وبحذف الوسيط نجد $x^2 + y^2 = \left(\dot{\psi}/\dot{\varphi}\right)^2 z^2$ وهي معادلة سطح القاعدة وسطح مخروطي رأسه O ومحور تناظره Oz.

ونحصل على مركبات $\vec{\omega}$ في R_s بسهولة باسقاط له على المحاور المماسة لـ R_s وهي

(7)

$$p_s = \dot{\varphi}\sin\psi \quad , \quad q_s = \dot{\varphi}\cos\psi \quad , \quad r_s = \dot{\psi}$$

ثم معادلات الآني للدوران في R_s

$$\frac{x_s}{p_s} = \frac{y_s}{q_s} = \frac{z_s}{r_s} \Rightarrow \frac{x_s}{\dot{\varphi}\sin\psi} = \frac{y_s}{\dot{\varphi}\cos\psi} = \frac{z_s}{\dot{\psi}}$$

وبحذف الوسيط نجد: $x_s^2 + y_s^2 = \left(\frac{\dot{\varphi}}{\dot{\psi}}\right)^2 z_s^2$ هذه معادلة سطح المتدحرج وهو سطح مخروطي محور تناظره Oz_s . و. هـ. م.

(7)

3

3